

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ (ГРИНА)



### Гараев Айрат Маратович

Студент института авиации, наземного транспорта и энергетики Казанского национального исследовательский технический университета им. А.Н. Туполева



### Костин Владимир Алексеевич,

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прочности конструкций Казанского национального исследовательский технический университета им. А.Н. Туполева

**Аннотация:** Данной статье рассматривается метод решения обратной задачи с использованием свойств функции Грина. Для решения задачи была рассмотрена балочная расчетная модель. По полученным результатам в эксперименте прогибов были определены изгибные жесткости балки в разных сечениях.

**Ключевые слова:** Функции Грина, определение изгибной жесткости, балочная расчетная модель.

**Abstract:** This article discusses a method for solving the inverse problem using the properties of the green function. To solve the problem, a beam calculation model was considered. Based on the results obtained in the deflection experiment, the bending stiffness of the beam in different sections was determined.

**Key words:** Of the green function, the determination of the Flexural rigidity, beam analysis model.

### Введение

В последнее время возрастает роль математического моделирования как метода исследования физических процессов. Сказанное относится к исследованию прочности летательных аппаратов, когда по имеющейся информации о геометрии конструкции, физико-механических характеристиках материалов и внешних нагрузках определяют распределение деформаций и напряжений в ее элементах.

Вместе с этим часто ощущается дефицит в достоверных исходных данных, который затрудняет математическое моделирование прочностных процессов. В связи с этим остро стоит вопрос о поиске надежных путей получения указанных сведений, использования результатов прочностных экспериментов. Помощь в решении этого вопроса оказывает методология решения обратных задач, которая превратилась в в мощный инструмент идентификации различного рода процессов и их параметров. [1]

### Определение изгибной жесткости с помощью функции влияния

В нашем случае для наглядного представления методологии решения обратных задач, проделаем

работу по расчету изгибной жесткости с помощью функции влияния (функция Грина).

При использовании матричного аппарата в задачах расчета самолета на прочность связь между силой и деформацией в узле представляется в виде:

$$[W] = [\delta] \cdot [P] \text{ или } [P] = [k] \cdot [W], \text{ где } [k] = [\delta]^{-1}.$$

Квадратная матрица  $[\delta]$  составляется из элементов, характеризующих податливость конструкции и так называемые коэффициенты влияния. Связь между нагрузкой и деформацией устанавливается матрицей жесткости  $[k]$ , обратной по отношению к матрице коэффициентов влияния. Элементы обеих матриц вычисляются по значениям параметров конструкции с использованием общих приемов строительной механики конструкции летательных аппаратов.

Для определения элементов матриц влияния и матриц жесткости, а также проверки их значений, вычисленных теоретическим путем, выполняют экспериментальное исследование статической прочности конструкции.

При таком эксперименте крыло нагружается условной нагрузкой (в 100, 1000 кг) в одной из точек сетки, принятой при выполнении расчета на прочность, и замеряются все прогибы по узловым точкам, как показано на рис. 1.

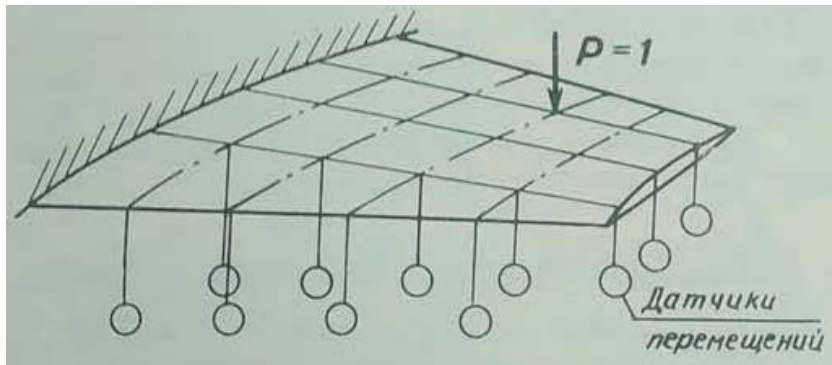


Рис. 1. Схема установки для определения элементов матриц влияния

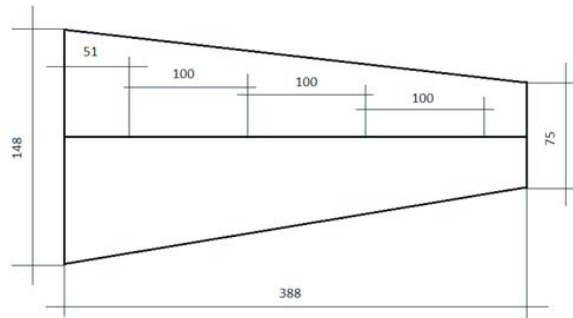


Рис. 2. Схема трапецевидной балки

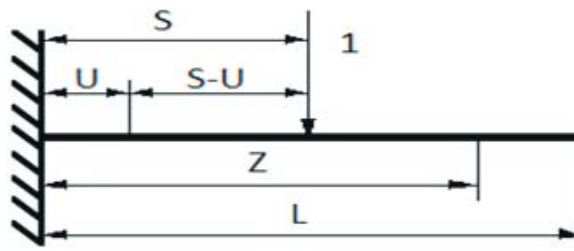


Рис. 3. Схема приложения единичной силы и координата замера прогибов

Замеренные при этом вертикальные прогибы точек, принятых в расчете за узловые, численно равны коэффициентам влияния (при учете масштаба условной нагрузки).

Замеры повторяются до тех пор, пока не будут получены или проверены все элементы матрицы, число которых может быть очень велико.

Для замеров вертикальных перемещений точек дискретной системы будем использовать лазерный измеритель. Полученные результаты вводим в ЭВМ и проводим расчет.

Вместо трудоемкого определения перемещений в отдельных точках системы весьма часто обращаются к аппроксимации упругой поверхности крыла показательными функциями. Тогда замеры перемещений можно производить в ограниченном числе дискретных точек. Перемещения же в остальных точках системы определяются расчетом. Для облегчения этих расчетов используются специальные справочные материалы и номограммы. [2]

В конструкциях летательных аппаратов типовым элементом чаще всего является балка. Поэтому проведем эксперимент именно с балкой, схема которой

показана на рис. 2, и вся работа будет проходить в одномерной системе, что значительно облегчает проведение расчетов.

Рассмотрим собственные колебания такой балки с сосредоточенной нагрузкой  $Q_i$  в точке  $s_i$  и с распределенной нагрузкой  $q_i$ :

$$y(z) = \sum_i G(z_i, s_i) Q_i + \int_0^L G(z_i, s_i) q(s) ds$$

где  $G(z_i, s_i)$  – функция, определяющая прогиб в точке  $z$  абсциссой  $z$  под действием единичной силы, приложенной в точке абсциссой  $s_i$  (функция Грина),  $L$  – длина балки.

В общем случае, имея в виду балку как постоянного, так и переменного сечения, функцию Грина будем определять непосредственно из выражения для прогиба в точке  $z$ , что показано на рис. 3. [3]

$$G(z_i, s_i) = \int_0^L \frac{(s-u)(z-u)}{EI(u)} du, \quad \text{при } z \geq s$$

Таблица 1

$G(z_i, s_j)$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$
S1	9,4	5,5	2,5	0,5
S2	5,8	3,7	1,8	0,4
S3	2,6	1,8	1	0,2
S4	0,6	0,5	0,3	0,1

Таблица 2

№, сечения	1	2	3	4
$EI_{\text{экс}}$	1750199,189	1558944,918	1208738,27	449536,4684

Таблица 3

$b_i$ , мм	138,4	119,6	100,8	82
$EI_{\text{теор}}$	1822894,08	1575275,52	1327656,91	1080038,4

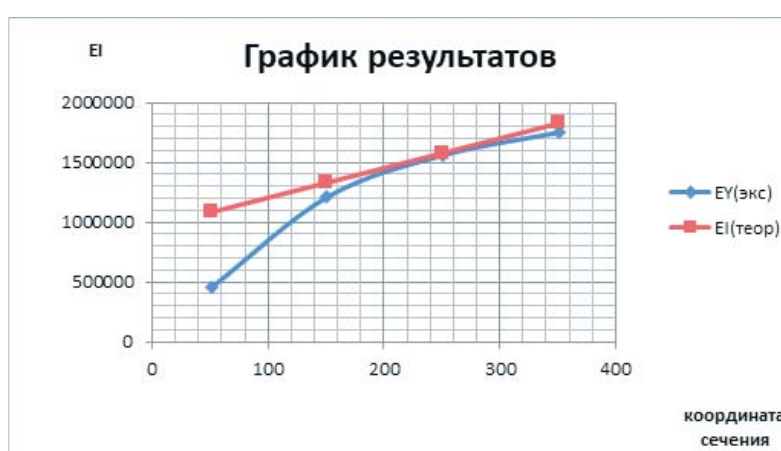


Рис. 4. График результатов

Интегрируем уравнение 2 и, подставляя полученные результаты эксперимента, определяем изгибную жесткость балки, используя функцию влияния.

Проводим эксперимент, прикладываем единичную нагрузку в 4 точках нашей балки, при этом измеряем от каждой приложенной единичной нагрузки в 4 точках прогиб. У нас получается 16 замеренных значений прогиба, т.к. имеется 4 точки и по 4 замера в каждой. Полученные результаты приводим в табл. 1.

После расчетов получаем значения изгибной жесткости балки  $EI_i$  для каждого сечения и приводим в табл. 2.

Балка в сечении является прямоугольником, и его изгибную жесткость подсчитываем, используя формулу  $I = (b h^3) / 12$ ,  $E = 7200$ ,  $h = 2,8$  мм и приводим в табл. 3.

### Заключение

Сравнивая теоретические и экспериментальные значения  $EI$  по графику, который показан на рис. 4, приходим к выводу, что данный метод подходит для нахождения изгибной жесткости сложной конструкции, состоящей из разного рода материалов и сложной геометрии. Однако при проведении экс-

перимента необходимо повысить точность, так как видно по результатам, что вблизи корневого сечения балки сильно расходятся значения жесткостей на рис. 4.

### Список литературы

1. Костин В.А. Обратные задачи прочности летательных аппаратов / В.А. Костин, М.Ю. Торопов, А.П. Снегуренко; Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. – 2002.
2. Крестовский С.С. Экспериментальные исследования прочности конструкции летательных аппаратов / С.С. Крестовский // Изд-во Казан. авиац. инст. – 1977.
3. Ананьев И.В. Динамика конструкций летательных аппаратов // И.В. Ананьев, Н.М. Колбин, Н.П. Сербрянский. – Машиностроение, 1972.