том, что космос коммерциализируется и становится экономически выгодным для бизнеса. На сегодняшний момент государственные космические программы занимаются научными исследованиями и создают условия для частных компаний. Частные компании, такие как SpaceX, в свою очередь начинают искать возможности для ведения бизнеса и создания услуг для потребителей разного рода.

Список литературы

1. Space Launch Report [http://spacelaunchreport.com/log2017.html]
2. NASA [https://www.nasa.gov/]
3. Роскосмос [https://www.roscosmos.ru/]
4. CNSA [http://www.cnsa.gov.cn/n6443408/index.html]
5. The Space Report [https://www.thespacereport.org/]

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Чурбаков Александр Владимирович
студент 1 курса, транспортного факультета, группа 161-121,
Московский политехнический университет

Муханов Сергей Александрович
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры «Математика»,
Московский политехнический университет

Аннотация: *В статье рассмотрены вопросы использования определенных интегралов в решении конкретных задач в жизни человека. Определенный интеграл находит широкое применение при решении прикладных задач. К вычислению определенных интегралов сводятся задачи об измерении площадей, ограниченных кривыми, длины дуг, кривых, площадей поверхности тел, объемов тел, а так же задачи определения координат центров тяжести, моментов инерции, пути тела по известной скорости движения, работы, производимой силой и многие другие задачи естествознания и техники. В данной работе рассматривается решение некоторых физических и химических задач.*

Abstract: *Thearticledealswiththeuse of certain integrals in solving specific problems in human life. A definite integral is widely used in solving applied problems.The calculation of definite integrals reduces the problem of measuring the areas bounded by curves, the lengths of arcs, curves, areas of the surface of bodies, body volumes, as well as the problems of determining the coordinates of the centers of gravity, moments of inertia, the path of the body from a known speed of movement, the work produced by force, and many other tasks of science and technology. In this paper we consider the solution of certain physical and chemical problems.*

Ключевые слова: *Определенный интеграл, прикладные задачи.*

Keywords: *Definite integral, applied problems.*

Введение. Определенный интеграл есть число, которое сопоставляется непрерывной функции $f(x)$ и отрезку $[a,b]$. При решении физических и химических задач необходимо прежде всего определить какую из величин принять за независимую переменную, а какую за искомую функцию. Затем надо найти выражение для приращения искомой функции Y в случае, когда аргумент x получит приращение Δx, т.е. выразить разность $y(x+\Delta x)-y(x)$ через величины о которых идет речь в условиях конкретной задач. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим уравнение содержащее производную

$$y'=\frac{d(y)}{d(x)}$$

Такое уравнение называется дифференциальным. В одном из простейших случаев, когда $y' = \mathrm{f(x)}$,

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

$dy = f(x)dx$, получаем $y = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$.

Значение постоянной С определяется из условия задачи.

Многие химические реакции и физические процессы характеризуются тем, что скорость изменения переменной величины пропорциональна первой степени этой переменной. Такие процессы описываются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

В случае химической реакции, входящие в это уравнение величины означают следующее: x – количество вещества

k – постоянная (константа скорости реакции)

t – время

Задача № 1. Какую работу надо затратить чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h ?

Чему равна работа, если тело удаляется на бесконечность?

Решение:

На тело массой m действует сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тела от центра Земли, и направленная к центру Земли $\hat{I}_1$

$$F = \frac{c\bar{e}\ (N_1O_1}{(R+x)^2}.$$

Здесь С – постоянная, определяемая из условия, что на поверхности (x=0) сила F равна силе веса mg, $F = mg = \frac{C}{R^2}$, откуда $C = mgR^2$, где R – радиус Земли, $\bar{e}\,(N_1O_1)$ единичный вектор, направленный из точки N к центру Земли $\hat{I}_1$. Элементарная работа центральной силы определяется по формуле $dA = F_x d_x$, где F_x – проекция силы $\bar{F}$ на направление $\hat{I}_{\tilde{o}}$, dx – элементарное перемещение. Для выражения полной работы имеем

$$A = -mgR^2\int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = mgR^2 \left.\frac{1}{R+x}\right|_0^h = -\frac{mgRh}{R+h}.$$

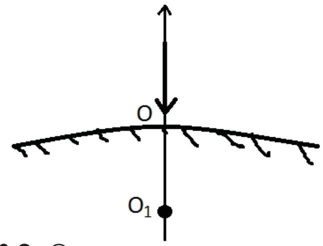
Знак «-» обусловлен тем что проекция силы $\bar{F}$ на направление $\hat{I}_{\tilde{o}}$ отрицательна. Искомая работа равна |A|

Переходя к пределу при h $\to +\infty$, находим, что A_∞ =mgR

Нахождение А

$$A = -mgR^2\int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = mgR^2 \left.\frac{1}{R+x}\right|_0^h =$$

$$= mgR^2\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = mgR^2\frac{R-R-h}{R(R+h)} = -mgR\frac{h}{R+h}$$



Задача № 2. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству.

Найти закон распада радия, если в начальный момент t=0 имелось Q_0 г. Радия, а через время T=1600 лет его количество уменьшилось в 2 раза.

Решение

Пусть в момент времени t масса радия составляет Q_2. Тогда за промежуток времени $t - t_0$ масса $Q_0 - Q$ подверглась распаду. Скорость распада = $\frac{d(Q_0 - Q)}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$. По условию задачи, $-\frac{dQ}{dt} = cQ$ (1)

Определим константу С, разделяя в (1) переменные и интергируя в пределах $[t_0, t]$ получим:

$$\frac{dQ}{Q} = -cdt; lnQ\Big|_{t_0}^{t} = -ct\Big|_{t_0}^{t}, \quad (2)$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -c(t - t_0)$$

откуда $Q = Q_0 e^{-c(t-t_0)}$ (3)

Из условия задачи следует, что при t=T=1600 лет и $Q = \frac{Q_0}{2}$

Подставляя в (2) T вместо t и $\frac{Q_0}{2}$ вместо Q, найдем

$\ln 2 = cT$, откуда $c = \frac{ln2}{T}$

Подставляем с в (3) $Q = Q_0 e^{-ln2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)} = Q_0 2^{\frac{-t-t_0}{T}}$

Так как $t_0 = 0$, $T = 1600$ лет, то закон распада выражается формулой $Q = Q_0 2^{-\frac{t}{1600}}$

Задача № 3. В сосуд, содержащий 10 л. воды, со скоростью 2 л/мин. поступает раствор, в каждом литре которого находится 0,3 кг соли. В сосуде раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с такой же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение

Возьмем за независимую переменную время t, а за искомую функцию y(t) – количество соли в сосуде через t минут после начала опыта.

Определим как изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$

За 1 минуту поступает 2 раствора, а за Δt минут - $2\Delta t$ л. В $2\Delta t$ л. содержится $0.3*2\Delta t = 0.6\Delta t$ кг.

С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ л. раствора. В момент t во всем сосуде (10л.) содержится $y(t)$ кг соли. Следовательно в $2\Delta t$ л. вытекающего раствора было бы $0.3\Delta t * y(t)$ кг. Соли, если за время Δt содержание соли в сосуде оставалось неизменным.

Но поскольку оно за это время изменяется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ литрах содержится $0.3*\Delta t\big(t(t)+\alpha\big)$ кг. Соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$

Следовательно в растворе, поступающем за промежутокврмени Δt ,содержится $0.3*\Delta t(y(t)+\alpha)$ кг. Соли. Приращение количество соли за это время $y(t+\Delta t)-y\big(t\big)$ равно разности найденных величин, т.е. $y(t+\Delta t)-y(t) = 0.6\Delta t - 0.3\Delta t(y(t)+\alpha)$ Разделим это равенство почленно на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В левой части получим производную $y'(t)=\dfrac{dy}{dt}$, в правой $0.6 - 0.3(y(t))$ т.к. $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$; $\dfrac{dy}{dt} = 0.6-0.3y$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{dy}{0.6-0.3y} = dt\big| *\big(-0.3\big)$$

$$\frac{-0.3dy}{0.6-0.3y} - 0.3dt$$

Найдем неопределенные интегралы от левой и правой частей равенства, используя свойства

$$\int d\varphi\big(x\big) = \varphi\big(x\big)+c$$

$$\int \frac{-0.3dy}{0.6-0.3y} = \int\big(-0.3\big)dt$$

$$ln(0.6-0.3y) = -0.3t + ln*c_1 \text{ , } \ln c_1 = c_2$$

$$0.6-0.3y = e^{-0.3t+lnc_1} = c_1 * e^{-0.3t}$$

Умножим обе части на 10 $\quad 6-3y = 10c_1 * e^{-0.3t}$

$$3y = 6-10c_1 * e^{-0.3t} \text{ , } \frac{10}{3}c_1 = c$$

$$Y = 2-ce^{-0.3t}$$

Постоянную C найдем из условия t=0 при t=0 ; $0 = 2-ce^0 = 2-c \to c = 2$

Получаем $y = 2-2e^{-0.3t}$

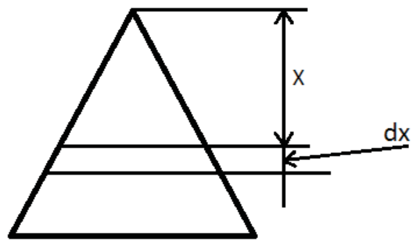
Через 5 минут в сосуде будет $y = 2 = 2*e^{-0.3*5} = 2-2e^{-\frac{1}{5}} \approx 1.9$ кг соли

Задача № 4. Согласно закону Гука, относительное удлинение δ стержня пропорционально напряжению силы δ , в соответствующем поперечном сечении т.к. $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\hat{A}}$, где Е – модуль Юнга.

Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания = R, высота конуса Н, удельный вес γ .

Решение

Стержень удлиняется под действием силы собственного веса. Рассмотрим поперечное сечение стержня, расположенное на расстоянии x от вершины, 0<x<H, и представляющее собой круг, обозначим радиус этого круга через r.



Вес кругового конуса, радиус основания которого r, а высота X, равен величине $\dfrac{\pi r^2}{3}x\gamma$ (объем на плотность).Напряжение силы γ в этом поперечном сечении равно

$$\delta = \frac{\pi r^2 x\gamma}{3} : \pi r^2 = \frac{x\gamma}{3}$$

Обозначим через Δdx удлинение элемента стержня длины dx

$$\Delta dx = \varepsilon dx = \frac{\gamma x}{3E}dx$$

Полное удлинение стержня вычислим с помощью интеграла

$$\Delta\int_0^H dx = \frac{\gamma}{3E}\int_0^H xdx$$

$$\int_0^H dx = x\Big|_0^H = H-0 = H$$

$$\int_0^H xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^H = \frac{H^2}{2} - 0 = \frac{H^2}{2}$$

Получаем

$$\Delta H = \frac{\gamma}{6E} H^2$$

Задача № 5. Скорость химической реакции переводящей вещество А в вещество В, пропорционально произведению концентрации этих веществ.

Какой процент вещества В будет содержаться в сосуде, через t=1 час, если при t=0 минут имелось 20% вещества В, а при t=15 минут его стало 80% ?

Решение

Пусть в сосуде объема V содержатся объемы V_A вещества А и V_B вещества В

Приращение V_B в случае перехода вещества А в вещество В имеет вид $dV_B = -dV_A$, а скорость реакции будет $\frac{dV}{dt} = \frac{dV_B}{dt} = -\frac{dV_A}{dt}$

По условию $\frac{dV_B}{dt} = c\frac{V_A}{V} * \frac{V_B}{V}$, где с- константа, которую надо определить.

Так как $V_A = V - V_B$

$$\frac{dV_B}{dt} = c\frac{(V - V_B)V_B}{V^2} \quad (*)$$

Делим переменные и интегрируем.

$$\int_{0,2V}^{0,8V} \frac{dV_B}{(V - V_B)V_B} = \frac{c}{V^2}\int_0^{15} dt$$

Получим

$$\frac{c}{V} = \frac{4}{15} ln2$$

Подставим в (*) и разделим переменные

$$\frac{dV_B}{(V - V_B)V_B} = \frac{4}{15} ln2 \frac{dt}{V}$$

Допустим, через 60 мин. в объеме V будет содержаться $V_B{}'$ вещества В

Интегрируем

$$\int_{0,2V}^{V_B{}'} \frac{dV_B}{V_B(V - V_B)} \frac{4}{15} * \frac{ln2}{V} \int_0^{60} dt$$

откуда $\ln\frac{V_B{}'}{V - V_B{}'} = ln2^{14}$

$$V_B' = \frac{2^{14}}{1 + 2^{14}}; \; V \approx 0,999938V$$

Таким образом через час в сосуде будет содержаться около 99,9938% вещества В.

Вычисления

$$\int_{0,2V}^{0,8V} \frac{dV_B}{(V - V_B)V_B} = \int_{0,2V}^{0,8V} \frac{dx}{(V - x)x} =$$

$$= \frac{1}{V}\int_{0,2V}^{0,8V}\left(\frac{1}{V - x} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{V}\left(-\ln(V - x) + lnx\right)\Big|_{0,2V}^{0,8V} =$$

$$= \frac{1}{V}\ln\frac{x}{V - x}\Big|_{0,2V}^{0,8V} = \frac{1}{V}\left(\ln\frac{0,8V}{0,2V} - \ln\frac{0,2V}{0,8V}\right) =$$

$$= \frac{1}{V}\left(\ln 4 - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{V}\ln 16 = \frac{4}{V}\ln 2$$

$$\int_0^{15} dt = t\Big|_0^{15} = 15 - 0 = 15$$

$$\int_{0,2V}^{V_B{}'} \frac{dV_B}{V_B(V - V_B)} = \int_{0,2V}^{V_B{}'} \frac{dx}{x(V - x)} =$$

$$= \frac{1}{V}\int_{0,2}^{V_B{}'}\left(\frac{1}{V - x} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{V}\left(\ln x - \ln(V - x)\right)\Big|_{0,2V}^{V_B} =$$

$$= \frac{1}{V}(\ln V_B{}' - \ln 0,2x - \ln(V - V_B{}') + \ln 0,8V) =$$

$$= \frac{1}{V}\left(\ln\frac{V_B}{V - V_B{}'} + \ln\frac{0,8x}{0,2x}\right) = \frac{1}{V}\ln\frac{4V_B{}'}{V - V_B{}'}$$

$$\int_0^{60} dt = t\Big|_0^{60} = 60 - 0 = 60$$

Получаем

$$\frac{1}{V} ln\frac{4 * V_B{}'}{V - V_B} = \frac{4}{15} * \frac{ln2}{V} * 60$$

$$\ln\frac{4 * V_{B'}}{V - V_B{}'} = ln2^{16}$$

$$\frac{4V_B{}'}{V - V_B{}'} = 2^{16} \rightarrow \frac{V_B{}'}{V - V_B{}'} = 2^{14}$$

Вывод. Таким образом, мы видим, что использование прикладной математики, в том числе и интегралов не заканчивается после университета, а находит свое продолжение и в дальнейшей жизни человека. Математика сопровождает нас в течение всей нашей жизни и обучаясь в университете мы можем приобрести навыки ее использования в нашей повседневной жизни и сделать ее проще.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. : Физматгиз, 1962.
2. Марон И.А, Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах изадачах. М.: «Наука», 1973.
3. ГусакА.А. Задачи и упражнения по высшей математике. М.: Выш. шк., 1988.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1971.